Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

Σ Χ Ο Λ Η   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Ω Ν
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν   Κ Α Ι   Φ Υ Σ Ι Κ Ω Ν   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ω Ν

Τ Ο Μ Ε Α Σ   Φ Υ Σ Ι Κ Η Σ

Επαναληπτική εξέταση στο μάθημα   ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Διδάσκων: Κ. Χριστοδουλίδης   **1 Σεπτεμβρίου 2010**

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες   **Απαντήστε σε όλα τα θέματα**   **Τα θέματα είναι ισοδύναμα**

Θέμα 1. (α) Ένα διαστημόπλοιο ταξιδεύει από τη Γη προς ένα άστρο, με ταχύτητα, στο σύστημα αναφοράς της Γης, ίση με $V = \frac{3}{5}c$. Όταν το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε απόσταση D από το άστρο, στο σύστημα της Γης, εκτοξεύει προς το άστρο ένα μικρότερο βοηθητικό σκάφος. Η ταχύτητα του σκάφους αυτού ως προς το διαστημόπλοιο είναι ίση με $\upsilon'_x = \frac{5}{13}c$. Ποια είναι η ταχύτητα του σκάφους, υ_x, ως προς τη Γη; Σε πόσο χρόνο από την εκτόξευση του σκάφους, για έναν παρατηρητή μέσα στο σκάφος, θα φτάσει αυτό στο άστρο;

(β) Ποια είναι η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου του οποίου η κινητική ενέργεια 2 MeV; Ποιος είναι ο λόγος της μάζας του προς τη μάζα ηρεμίας του;

[Για τη μάζα ηρεμίας του ηλεκτρόνιου είναι $M_0 c^2 = 0{,}511\ \text{MeV}$.]

Θέμα 2. Μια δέσμη σωματιδίων μ παράγεται σε κάποιο ύψος στην ατμόσφαιρα. Τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα $\upsilon_\mu = 0{,}99\,c$ κατακόρυφα προς τα κάτω. Τα σωματίδια μ διασπώνται σε ηλεκτρόνια και νετρίνα ($\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_\mu = 2\ \mu\text{s}$ στο δικό τους σύστημα αναφοράς.

(α) Υπολογίστε το ύψος στο οποίο παράγονται τα σωματίδια, αν ένα ποσοστό 1% αυτών επιζούν και φθάνουν στην επιφάνεια της Γης.

(β) Πόσο είναι το μήκος αυτής της διαδρομής, όπως το βλέπουν τα σωματίδια;

[Δίνονται: Νόμος της ραδιενέργειας: $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$ $\ln 0{,}01 = -4{,}6$.]

Θέμα 3. Ακίνητο σωματίδιο μάζας ηρεμίας M διασπάται σε ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας m και ένα φωτόνιο. Να βρεθούν οι ενέργειες αυτών των προϊόντων στο σύστημα αναφοράς του αρχικού σωματιδίου.

Θέμα 4. Στο σύστημα του εργαστηρίου, κινούμενο σωματίδιο Χ (με μάζα ηρεμίας m), συγκρούεται με άλλο ακίνητο σωματίδιο Χ και το μετατρέπει σε σωματίδιο Υ (με μάζα ηρεμίας $M = 3m$), σύμφωνα με την αντίδραση $X + X = X + Y$. Πόση είναι η ενέργεια κατωφλίου του κινούμενου Χ στο σύστημα του εργαστηρίου για να γίνει αυτό;

Υπόδειξη: Εξετάστε την αντίδραση στο σύστημα μηδενικής ορμής.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$

Τυπολόγιο

Σχετικιστική Κινηματική:

Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S, και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$, τότε:

$$x' = \gamma\left(x - Vt\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad \beta \equiv \frac{V}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Συστολή του μήκους: $\Delta l = \Delta l_0 / \gamma$ (Δl_0 = μήκος ηρεμίας)
Διαστολή του χρόνου: $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$ (Δt_0 = ιδιοχρόνος)

Μετασχηματισμός της ταχύτητας: $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}$, $\upsilon'_y = \dfrac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}$, $\upsilon'_z = \dfrac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}$.

Σχετικιστική Δυναμική:

$m_0 = m(0) \qquad m = m(\upsilon) = \gamma m_0$ όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, υ = ταχύτητα του σωματιδίου

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{\upsilon}} = \gamma m_0 \vec{\mathbf{\upsilon}} \qquad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \qquad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Για φωτόνια: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$ $\qquad E = pc$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας: $p'_x = \gamma\left(p_x - VE/c^2\right) \quad p'_y = p_y \quad p'_z = p_z \quad E' = \gamma\left(E - Vp_x\right)$

Ισοδυναμία μάζας-ενέργειας: $\Delta E = \Delta m\, c^2$

Ηλεκτρομαγνητισμός:

Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$E'_x = E_x \qquad E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right) \qquad E'_z = \gamma\left(E_z + VB_y\right)$$

$$B'_x = B_x \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + VE_z/c^2\right) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - VE_y/c^2\right)$$

Θέμα 1. (α) Ένα διαστημόπλοιο ταξιδεύει από τη Γη προς ένα άστρο, με ταχύτητα, στο σύστημα αναφοράς της Γης, ίση με $V = \frac{3}{5}c$. Όταν το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε απόσταση D από το άστρο, στο σύστημα της Γης, εκτοξεύει προς το άστρο ένα μικρότερο βοηθητικό σκάφος. Η ταχύτητα του σκάφους αυτού ως προς το διαστημόπλοιο είναι ίση με $\upsilon'_x = \frac{5}{13}c$. Ποια είναι η ταχύτητα του σκάφους, υ_x, ως προς τη Γη; Σε πόσο χρόνο από την εκτόξευση του σκάφους, για έναν παρατηρητή μέσα στο σκάφος, θα φτάσει αυτό στο άστρο;

(β) Ποια είναι η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου του οποίου η κινητική ενέργεια 2 MeV; Ποιος είναι ο λόγος της μάζας του προς τη μάζα ηρεμίας του;

Για τη μάζα ηρεμίας του ηλεκτρόνιου είναι $M_0 c^2 = 0{,}511\ \text{MeV}$.

ΛΥΣΗ

(α) Η ταχύτητα του σκάφους ως προς τη Γη δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_x = \dfrac{\upsilon'_x + V}{1 + \dfrac{\upsilon'_x V}{c^2}}$.

Επειδή είναι $V = \frac{3}{5}c$ και $\upsilon'_x = \frac{5}{13}c$, προκύπτει ότι $\upsilon_x = \dfrac{\upsilon'_x + V}{1 + \dfrac{\upsilon'_x V}{c^2}} = \dfrac{\frac{5}{13}c + \frac{3}{5}c}{1 + \frac{5}{13}\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{5}c$.

Για $\upsilon_x = \frac{4}{5}c$, ο παράγοντας Λόρεντζ είναι $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \dfrac{5}{3}$.

Για έναν παρατηρητή στη Γη το ταξίδι του σκάφους θα διαρκέσει χρόνο $t = \dfrac{D}{\upsilon_x} = \dfrac{D}{\frac{4}{5}c} = \dfrac{5D}{4c}$.

Για έναν παρατηρητή μέσα στο σκάφος το ταξίδι θα διαρκέσει χρόνο $t' = \dfrac{t}{\gamma} = \dfrac{5D}{4c}\dfrac{3}{5} = \dfrac{3D}{4c}$.

(β) Η κινητική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση $K = \dfrac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - M_0 c^2$.

Για το ηλεκτρόνιο είναι $M_0 c^2 = 0{,}511\ \text{MeV}$. Επομένως,

$$2\ \text{MeV} = \frac{0{,}511\ \text{MeV}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 0{,}511\ \text{MeV}$$

από την οποία προκύπτει ότι $\upsilon = 0{,}98c$.

Ο λόγος της μάζας του ηλεκτρονίου με κινητική ενέργεια 2 MeV προς τη μάζα ηρεμίας του είναι:

$$\frac{M}{M_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}98^2}} = 5.$$

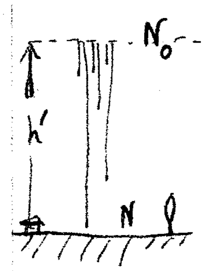
Θέμα 2. Μια δέσμη σωματιδίων μ παράγεται σε κάποιο ύψος στην ατμόσφαιρα. Τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα $\upsilon_\mu = 0,99\,c$ κατακόρυφα προς τα κάτω. Τα σωματίδια μ διασπώνται σε ηλεκτρόνια και νετρίνα ($\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_\mu = 2\ \mu\text{s}$ στο δικό τους σύστημα αναφοράς.

(α) Υπολογίστε το ύψος στο οποίο παράγονται τα σωματίδια, αν ένα ποσοστό 1% αυτών επιζούν και φθάνουν στην επιφάνεια της Γης.

(β) Πόσο είναι το μήκος αυτής της διαδρομής, όπως το βλέπουν τα σωματίδια;

[Δίνονται: Νόμος της ραδιενέργειας: $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$ $\quad \ln 0,01 = -4,6$.]

ΛΥΣΗ



(α) Στο σύστημα αναφοράς της Γης (S΄), το ποσοστό των επιζώντων σωματιδίων μετά από χρόνο t' είναι

$$N / N_0 = \mathrm{e}^{-t'/\tau'_\mu},$$

όπου $\tau'_\mu = \gamma_\mu \tau_\mu$ είναι η μέση διάρκεια ζωής των μιονίων στο σύστημα S΄. Για $\beta_\mu = 0,99$ είναι $\gamma_\mu = 7,07$ και $\tau'_\mu = 7,07 \times 2 \times 10^{-6} = 1,41 \times 10^{-5}$ s. Ο χρόνος t' για τον οποίο θα είναι $N / N_0 = 0,01$, δίνεται επομένως από τη σχέση

$$0,01 = \mathrm{e}^{-t'/1,41\times 10^{-5}\ \mathrm{s}}, \quad \text{από όπου} \quad \ln 0,01 = -\ln 100 = -\frac{t'}{1,41 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}}$$

και τελικά

$$t' = 6,54 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}.$$

Στη διάρκεια του χρόνου αυτού, τα μιόνια διανύουν, στο σύστημα S΄, απόσταση

$$h' = \beta_\mu c t' = 19\ \mathrm{km}$$

και αυτό είναι το ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης στο οποίο παράγονται.

(β) Στο σύστημα αναφοράς των μιονίων (S), ισχύει η σχέση

$$N / N_0 = \mathrm{e}^{-t/\tau_\mu}.$$

Τώρα είναι

$$\ln 0,01 = -\ln 100 = -\frac{t'}{2 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}}$$

και επομένως

$$t = 9,3 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}.$$

Αυτός είναι ο χρόνος που βλέπουν τα σωματίδια να διαρκεί το ταξίδι στην ατμόσφαιρα. Στη διάρκεια του χρόνου αυτού, τα μιόνια βλέπουν, στο δικό τους σύστημα αναφοράς, S, την ατμόσφαιρα να μετακινείται κατά απόσταση

$$h = \beta_\mu c t = 2,7\ \mathrm{km}.$$

Αυτό είναι το πάχος της ατμόσφαιρας όπως το βλέπουν τα μιόνια.

Θέμα 3. Ακίνητο σωματίδιο μάζας ηρεμίας M διασπάται σε ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας m και ένα φωτόνιο. Να βρεθούν οι ενέργειες αυτών των προϊόντων στο σύστημα αναφοράς του αρχικού σωματιδίου.

ΛΥΣΗ

Διατήρηση της ενέργειας: $$Mc^2 = mc^2\gamma + E_\gamma \qquad (1)$$

Διατήρηση της ορμής: $$\frac{E_\gamma}{c} = mc\beta\gamma \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την E_γ από την εξίσωση (2) στην εξίσωση (1), έχουμε

$$M = m\gamma + m\beta\gamma = m\gamma(1+\beta) = m\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Αυτή η εξίσωση δίνει $$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{M^2}{m^2}, \qquad \beta = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}$$

και $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\right)^2}} = \frac{M^2 + m^2}{\sqrt{4m^2 M^2}} = \frac{M^2 + m^2}{2mM}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1),

$$E_\gamma = (M - m\gamma)c^2 = \left(M - m\frac{M^2 + m^2}{2mM}\right)c^2 = \left(M - \frac{M^2 + m^2}{2M}\right)c^2$$

Επομένως, η ενέργεια του φωτονίου είναι:

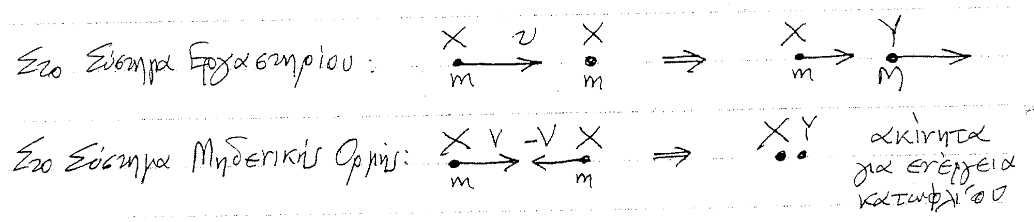
$$E_\gamma = \frac{M^2 - m^2}{2M}c^2 .$$

Η ενέργεια του σωματιδίου δίνεται από τη σχέση $E = Mc^2 - E_\gamma$, από την οποία προκύπτει ότι

$$E = \frac{M^2 + m^2}{2M}c^2 .$$

Θέμα 4. Στο σύστημα του εργαστηρίου, κινούμενο σωματίδιο Χ (με μάζα ηρεμίας *m*), συγκρούεται με άλλο ακίνητο σωματίδιο Χ και το μετατρέπει σε σωματίδιο Υ (με μάζα ηρεμίας $M = 3m$), σύμφωνα με την αντίδραση $X + X = X + Y$. Πόση είναι η ενέργεια κατωφλίου του κινούμενου Χ στο σύστημα του εργαστηρίου για να γίνει αυτό;
Υπόδειξη: Εξετάστε την αντίδραση στο σύστημα μηδενικής ορμής.

ΛΥΣΗ



Θα εξετάσουμε την αντίδραση στο Σύστημα Μηδενικής Ορμής (Σ.Μ.Ο.). Στο σύστημα αυτό, τα δύο αρχικά σωματίδια Χ κινούνται με ίσες και αντίθετες ταχύτητες, έστω $\pm V$. Η μέγιστη ενέργεια θα είναι διαθέσιμη για τη δημιουργία του σωματιδίου Υ αν τα παραγόμενα Χ και Υ είναι ακίνητα στο σύστημα αυτό. Έτσι και η ορμή παραμένει μηδενική και η διαθέσιμη ενέργεια είναι η μέγιστη δυνατή αφού τα δύο σωματίδια δεν έχουν κινητική ενέργεια. Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας στο σύστημα μηδενικής ορμής δίνει

$$2mc^2\gamma = (m+M)c^2, \quad \text{όπου} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-(V/c)^2}\,.$$

Επομένως $$\gamma = \frac{m+M}{2m} = \frac{m+3m}{2m} = 2 \quad \text{και} \quad V = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c\,.$$

Αφού το σωματίδιο που είναι ακίνητο στο Σύστημα του Εργαστηρίου (Σ.τ.Ε.) έχει ταχύτητα $-V$ στο Σ.Μ.Ο., προκύπτει ότι το Σ.Μ.Ο. κινείται με ταχύτητα V ως προς το Σ.τ.Ε. Άρα η ταχύτητα του αρχικά κινούμενου σωματιδίου Χ στο Σ.τ.Ε. θα πρέπει να είναι

$$\upsilon = \frac{V+V}{1+V^2/c^2} = c\frac{(V/c)}{1+(V/c)^2} = c\frac{\sqrt{3}}{1+3/4}, \qquad \upsilon = \frac{4\sqrt{3}}{7}c\,.$$

Αυτό αντιστοιχεί, στο Σ.τ.Ε. σε $\beta_{\mathrm{E}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ και $\gamma_{\mathrm{E}} = 7$.

Επομένως, το σωματίδιο Χ κινείται αρχικά με ταχύτητα $\upsilon = \frac{4\sqrt{3}}{7}c$ στο Σ.τ.Ε. ενώ τα παραγόμενα σωματίδια Χ και Υ κινούνται και τα δύο με την ίδια ταχύτητα $V = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Η ενέργεια κατωφλίου του αρχικά κινούμενου σωματιδίου Χ είναι αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή $\gamma_{\mathrm{E}} = 7$ που βρέθηκε:

$$E_\kappa = mc^2\gamma_{\mathrm{E}} = 7mc^2\,.$$

Η ολική ενέργεια στο Σ.τ.Ε. είναι $E_{o\lambda} = mc^2\gamma_{\mathrm{E}} + mc^2 = 8mc^2$. Παράγονται δύο σωματίδια συνολικής μάζας ηρεμίας $4m$, που κινούνται με την ίδια ταχύτητα $V = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.